EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

ROQUE LUIS PEREZAGUA LÓPEZ
EMPRESARIOS AGRUPADOS INTERNACIONAL

INTRODUCCIÓN

Dicen que David Hilbert, ante el asombro de su mujer, afirmó en una ocasión que, si despertase 500 años después de muerto, lo primero que preguntaría es si la hipótesis de Riemann acerca de la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann había sido probada. Probablemente su mujer Käthe farfullaría para sí misma: *¡eso no pasará, querido!*

El problema de los tres cuerpos consiste en conocer la evolución de la trayectoria de tres masas cualesquiera sometidas exclusivamente a la fuerza gravitatoria entre ellas. No forma parte de los 23 problemas del milenio que identificó el matemático David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de París de 1900. Sin embargo, dada su longevidad y su transcendencia, quizá hubiera sido merecedor de tener un lugar de honor en dicha lista. Este problema es fundamental en astronomía, mecánica orbital, dinámica galáctica, formación estelar, así como en la determinación de trayectorias óptimas para misiones de naves espaciales, tanto aterrizajes robóticos y satélites como viajes tripulados.

Así como el problema de los dos cuerpos tiene solución analítica[1], cuando se involucran más de dos cuerpos, salvo en determinados escenarios, no existe una solución de este tipo, por lo que las trayectorias de los cuerpos hay que calcularlas mediante métodos numéricos.

En mecánica celeste los ejemplos típicos del problema de los tres cuerpos son los sistemas del tipo estrella-planeta-planeta, estrella-planeta-luna, estrella-planeta-asteroide estrella-planeta-nave. Los últimos casos pueden ser simplificados ya que la masa del asteroide o de la nave es despreciable frente a la masa de la estrella o del planeta, esto implica que se puede despreciar la influencia gravitacional del asteroide sobre los otros dos cuerpos. Si se dan estas condiciones, el problema general de los tres cuerpos P3C se transforma en el llamado problema de los tres cuerpos restringido o P3CR. Se pueden aún imponer más restricciones al problema fijando el tipo de órbita que siguen los dos cuerpos más masivos que, como se sabe, puede ser cualquiera de las curvas cónicas: circunferencia, elipse, parábola o hipérbola. Como se puede imaginar, el caso más estudiado es el caso en que la órbita entre los dos cuerpos más masivos es circular (P3CRC).

Figura 1. Tres cuerpos abandonados en el espacio sin más interacción que su mutua atracción gravitatoria. Elaboración propia.

[1]La solución analítica es una expresión matemática que proporciona toda la información sobre el comportamiento del sistema, para cualquier valor de las variables y parámetros que intervienen en las ecuaciones de gobierno. No todos los sistemas tienen solución analítica. En esos casos se acude a una solución aproximada mediante métodos numéricos.

UN POCO DE HISTORIA

El problema de los tres cuerpos fue enunciado por primera vez por Sir Isaac Newton a finales del siglo XVII en su *Principia* [1]. Newton consideró el movimiento de la Tierra y la Luna alrededor del Sol. Newton logró deducir matemáticamente las leyes de Kepler y así explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol mediante una ley de gravitación universal, que básicamente es el problema de los dos cuerpos. Puesto que tanto la Tierra como el Sol determinan el movimiento de la Luna, Newton generalizó el problema e intentó predecir el movimiento de tres cuerpos cualesquiera que se mueven en el espacio bajo la influencia de su atracción gravitacional mutua, un problema que más tarde se conoció como el problema de los tres cuerpos.

A diferencia del problema de los dos cuerpos, Newton no pudo obtener una solución matemática general. De hecho, el problema de los tres cuerpos, aunque resultó muy fácil de definir, resultó terriblemente difícil de resolver. A lo largo de los siglos se han obtenido avances y un conocimiento más profundo del problema. Así, una solución particular del problema fue propuesta por Leonhard Euler en 1767 [2]. Euler consideró tres cuerpos de masas arbitrarias situados en una línea recta. Demostró que, bajo ciertas condiciones iniciales, los cuerpos se moverían describiendo elipses, pero siempre se mantendrían alineados.

Otra solución particular fue hallada por Joseph-Louis Lagrange [3] en 1792. Lagrange encontró una segunda clase de órbitas periódicas para el problema, mostrando que, si los cuerpos se encuentran de tal forma que generan un triángulo equilátero, estos se moverían a lo largo de elipses para unas ciertas condiciones iniciales, manteniéndose siempre en los vértices de triángulos equiláteros de diferentes tamaños. Las soluciones particulares de Euler y Lagrange son las únicas soluciones exactas conocidas del problema de los tres cuerpos hasta el momento. Sin duda, las soluciones dadas por Euler y Lagrange son bellas soluciones particulares al problema general, aunque la verdad que poco prácticas, porque no enseñan, ni por asomo, la verdadera magnitud del problema.

En cualquier caso, dejando volar la imaginación un poco, uno no puede dejar de pensar que quizá, de entre las más de 100 000 millones de estrellas de la Vía Láctea, haya tres de ellas que cumplan la configuración de Euler o de Lagrange. ¡Qué espectáculo contemplar que las estrellas se mueven alineadas como si estuvieran moviéndose por un enorme rail o, que lo hacen formando entre ellas un triángulo equilátero!

Después de las investigaciones de Newton, Euler, Lagrange y Jacobi entre otros, a fines del siglo XIX, fue sin duda Henri Poincaré quien más ha aportado al problema de los tres cuerpos. De hecho, fue el ambidextro[2] matemático quien descubrió que el problema, en la mayoría de las veces, no es integrable, es decir, no existe una solución analítica, y por si eso fuera poco, el problema exhibe una sensibilidad extrema a las posiciones y velocidades iniciales de los cuerpos [4]. Incluso ínfimas variaciones en las posiciones y velocidades de partida hacen que al largo plazo el sistema siga derroteros completamente distintos. Esta hipersensibilidad descrita por Poincaré a las condiciones iniciales tiene implicaciones de gran calado. La puerta de la ciencia del caos quedó abierta de par en par.

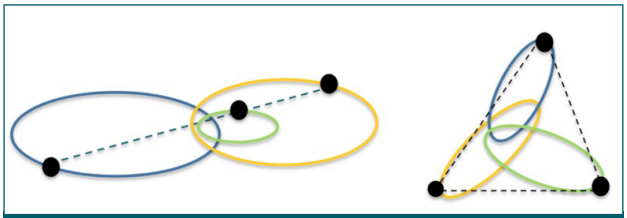

Figura 2 Soluciones a los problemas colineal de Euler y del triángulo equilátero de Lagrange. Elaboración propia.

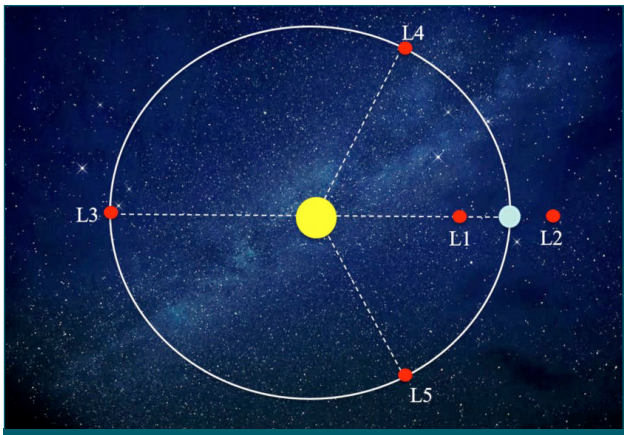

Figura 3. Diagrama de Lagrange de los puntos L1 a L5 en un Sistema Estrella-planeta. Elaboración propia.

Euler fue el primero en formular el P3CRC en un sistema de coordenadas rotacional, que supone el dejar que el sistema de coordenadas centrado en el baricentro rote juntamente con las dos masas principales. Esto supuso un avance importante en el estudio del problema.

Lagrange también estudió el P3CRC, deduciendo que tenía cinco puntos de equilibrio (conocidos ahora como los puntos L1-L5 de Lagrange). Así, por ejemplo, se denominan troyanos[3] a los asteroides que comparten órbita con un planeta en torno a los puntos de Lagrange estables L4 y L5, los cuales están situados 60° delante y 60° detrás del planeta en su órbita. La vista del sistema Sol-planeta desde un troyano es muy curiosa, porque siempre observa a las dos masas (pongamos el Sol y la Tierra) en la misma posición relativa. De hecho, la Tierra también posee un asteroide troyano denominado 2010 TK7 de unos 300 metros de diámetro (más o menos la altura de la torre Eiffel), que lo acompaña en su viaje alrededor del Sol.

En el siglo XX, el desarrollo de los ordenadores y del *software* de cálculo hizo posible revisitar el problema con la ayuda de herramientas de las que carecían los matemáticos de los siglos anteriores. Las simulaciones dieron la razón a Poincaré mostrando que, dependiendo del escenario analizado,

[2]La escasa habilidad de Poincaré para el dibujo hizo que se le conociera como el ambidextro, ya que podía dibujar igual de mal con la mano derecha que con la izquierda.

[3]La denominación «troyano» se debe a que se estableció por convención bautizar a los asteroides que ocupaban dichos puntos de la órbita de Júpiter con el nombre de los personajes de la guerra de Troya: los que anteceden al planeta pertenecen al grupo del campo griego (Aquiles, Patroclo, Odiseo…), y los que siguen al planeta al grupo del campo troyano (Paris, Héctor, Príamo…).

un sistema de tres cuerpos experimenta periodos de movimiento caótico o aleatorio que se alternan con periodos de movimiento regular, hasta que el destino final del sistema se desintegra en un par de cuerpos que orbitan su centro de masa común y un tercero que se aleja o escapa de ellos. Terrible noticia en muchos aspectos para los buscadores de vida extraterrestre. Sabido es que la mayoría de las estrellas conocidas forman conjuntos binarios, como por ejemplo la estrella más cercana a nuestro Sol, llamada Alfa Centauri, situada a 4.3 años luz de nosotros, y que en realidad es un sistema de dos estrellas separadas 0.2 años luz. Si el destino final de los planetas que, durante cierto tiempo, orbitan más o menos establemente alrededor de ellas es salir despedidos o chocar con las estrellas, mal vamos para el surgimiento de la vida en la mayoría de las estrellas.

La naturaleza caótica implica que, no solo es imposible una solución de forma cerrada, sino que las simulaciones por computadora no pueden proporcionar predicciones específicas y confiables a largo plazo. Es más, la disponibilidad de grandes conjuntos de simulaciones llevadas en todo el mundo llevó a finales del siglo pasado a la idea de que quizá era mejor buscar una solución estadística a una solución determinista al problema. De esta manera se empezó a intentar predecir la probabilidad de escape de cada uno de los tres cuerpos más que en predecir la trayectoria. Últimamente se ha avanzado en este campo a partir de introducir redes neuronales, es decir, Inteligencia Artificial, a partir de una base de datos de una gran cantidad de simulaciones realizadas [7].

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE ACUERDO CON LA MECÁNICA DE NEWTON

Para llegar a las ecuaciones del movimiento bajo el prisma de la mecánica de Newton se denominarán las tres masas como M_1, M_2, M_3 y sus posiciones respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas por los vectores $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$. De esta manera la posición de un cuerpo respecto a otro vendrá dada por $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_i - \vec{R}_j$, donde $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$ para i, j = 1, 2, 3. En la figura 4 se incluye un esquema de las fuerzas y vectores de posición mencionados.

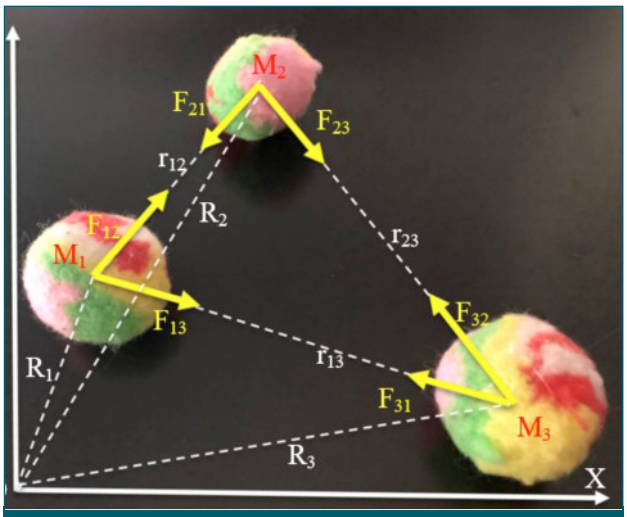

Figura 4. Esquema plano de fuerzas y vectores posición de los tres cuerpos. Elaboración propia.

Aplicando la segunda ley de Newton para el caso en que solo exista la atracción gravitatoria entre las masas:

$$M_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{j=1}^{3} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (1)$$

Con i, j = 1, 2, 3 y siendo G la constante de gravitación universal, cuyo valor es de $6.67384 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg.

Se tiene por tanto un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que pueden ser escritas de manera explícita en términos de las componentes del vector $\vec{R}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}$. De esta manera se tendrían 9 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Dado que cada una de ellas puede convertirse en 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se tendría un total de 18 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen al completo el problema general de los tres cuerpos. Se requerían, por tanto, 18 condiciones iniciales que correspondería a las velocidades y posiciones iniciales de los tres cuerpos.

Si se considerase un movimiento en el plano, el problema quedaría reducido a 6 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que se traducirían en 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Es fácil demostrar que, como era de esperar, el movimiento del baricentro de las tres masas se mueve a velocidad constante.

Puesto que el movimiento debido exclusivamente a la fuerza de gravedad es conservativo, en lugar de la mecánica de Newton puede aplicarse la mecánica de Hamilton, que llevará directamente a un conjunto de también 18 ecuaciones diferenciales de primer orden, equivalente al paquete de ecuaciones obtenidas mediante la mecánica de Newton. Los sistemas hamiltonianos[4] forman un subconjunto del conjunto de sistemas dinámicos. En términos sencillos, los sistemas hamiltonianos son conservativos y no hay efectos como la fricción que conduzcan finalmente a una situación estacionaria, de ahí que los sistemas hamiltonianos no tengan atractores[5].

SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS RESTRINGIDO Y CIRCULAR

Hay numerosos trabajos acerca de modelizaciones en Matlab u otros *softwares* similares para la resolución de casos particulares del P3CRC como el desarrollado por Juan Valentín Mendoza en Matlab 5.1 [6]. Se suele aplicar con buenos resultados el método de Runge-Kutta de orden cuatro[6] para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales

[4]El Hamiltoniano H de un sistema se asocia a la energía total del sistema, es decir, a la suma de la energía cinética y potencial de las tres masas involucradas.

[5]En los sistemas dinámicos, un atractor es un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar, dada una gran variedad de condiciones iniciales en el sistema.

[6]El error cometido es proporcional a la cuarta potencia del paso de integración, es decir $O(h^4)$.

con unas condiciones dadas de posición y velocidad de los cuerpos.

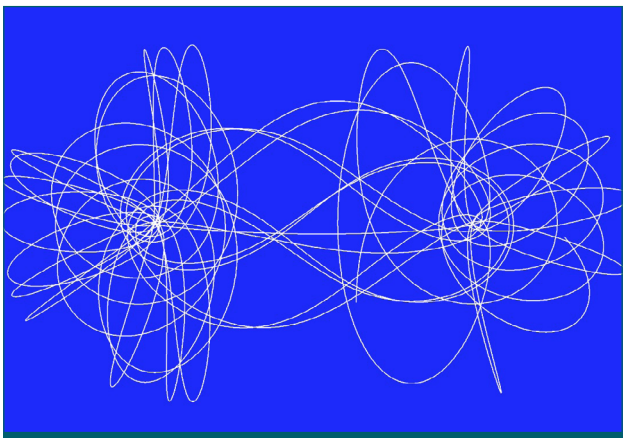

Figura 5. Simulación de la trayectoria de un planeta alrededor de un sistema binario de estrellas girando una alrededor de la otra. J. C. Sprott, University of Wisconsin. Recuperado de https://culturacientifica.com/.

A pesar de las simplificaciones que se puedan hacer en el P3CRC, como por ejemplo que una de las masas (M_3) sea pequeña comparada con las otras dos, con lo que no las afecta gravitatoriamente, el problema tampoco es resoluble en general y las trayectorias pueden ser "caóticas". Así, en la Figura 5 se muestra el posible movimiento de una masa M_3 en el campo gravitatorio que crean dos soles iguales, de masas M_1 y M_2. Para simplificar, se ha supuesto que M_1 y M_2 se mueven en órbita circular alrededor de su centro de masas (como lo suelen hacer las estrellas binarias), y se ha escogido un sistema de referencia centrado en dicho círculo y que rota de forma que M_1 y M_2 parecen estar en reposo (coordenadas rotacionales de Euler).

Puede apreciarse lo caótico de las órbitas cuasiperiódicas[7] de M_3. No parece que la situación del planeta Tatooine, con sus dos soles, pueda ser precisamente un oasis de estabilidad climática.

CONCLUSIONES

El problema de los tres cuerpos viene provocando dolores de cabeza en los físicos y matemáticos desde hace al menos 300 años. Es posible que muchos de los grandes problemas sin resolver tengan enormes implicaciones, por ejemplo, la hipótesis de Riemann sobre la distribución de los números primos y su posible aplicación en criptología, o incluso las implicaciones de la prueba de la conjetura de Goldbach[8]. En el caso que nos ocupa, podría decirse que del problema de los tres cuerpos depende el futuro de nuestro sistema solar o que las expectativas de desarrollo de vida inteligente extraterrestre decrezcan de manera significativa. Y es que se sabe que el problema de varios cuerpos sometidos a la acción de la gravedad es generalmente irresoluble analíticamente a partir de tres y se sabe que pequeñas modificaciones alteran sustancialmente la trayectoria de los cuerpos involucrados pasado un tiempo que puede ser muy grande. Eso plantea cuestiones como ¿es nuestro sistema solar estable?, ¿el conjunto de las órbitas de los ocho planetas permanecerá inalterable, como parece que viene sucediendo desde hace millones de años o tal vez se desmoronará en un tiempo más o menos largo? De existir el esquivo planeta nueve ¿alterará lo suficiente nuestro delicado equilibrio como para esparcir los planetas fuera de la órbita solar o precipitarlos contra el mismo Sol?

En cualquier caso, es sorprendente que un problema en teoría tan sencillo y simple como la predicción del movimiento de tres masas en el espacio dé lugar a semejantes inquietudes. Ya se sabe, cosas de la Fuerza.

REFERENCIAS

[1]. Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Royal Soc. Press, London, 1687.

[2]. Euler. De moto rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. Novo Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 11:144-151, 1767.

[3]. Lagrange. Essai sur le probléme des trois corps. Euvres, 6:229-331, 1772.

[4]. H. Poincaré. Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste, Tome 1 (1892), 2 (1892), 3 (1899); English translation New Methods of Celestial Mechanics, Parts 1, 2, 3 (1993). Gauthier-Villars; American Inst. Phys., 1892.

[5]. H. Poincarée. Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique. Acta, 13:1-270, 1890.

[6]. Juan Valentín Mendoza. Un experimento numérico sobre el problema de los tres cuerpos en Mat Lab 5.1. Universidad Nacional de Piura, Perú. Julio 2004

[7]. P. G. Green et al. Newton vs the Machine: Solving the Chaotic Three-body Problem Using Deep neural Networks. arXiv:1910.07291v1 [astro-ph.GA] 16 October 2019.

[7]Un movimiento cuasiperiódico es el tipo de evolución temporal que presenta un fenómeno físico que sin ser periódico repite una y otra vez posiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema. Un fenómeno cuasiperiódico oscila una y otra vez mostrando cada cierto tiempo un aspecto similar al que tuvo el sistema previamente, pero no exactamente el mismo.

[8]Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.