ESTADO DEL PROBLEMA DEL MILENIO: LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

ROQUE LUIS PEREZAGUA LÓPEZ
Ingeniero
EMPRESARIOS AGRUPADOS

INTRODUCCIÓN

Dado que entender las ecuaciones de Navier-Stokes se considera el primer paso para comprender el esquivo fenómeno de la turbulencia, el *Clay Mathematics Institute*[1], en mayo de 2000, hizo de este problema uno de sus siete Problemas del Milenio en matemáticas. Ofreció un premio de un millón de dólares a la primera persona que fuera capaz de:

En tres dimensiones espaciales y en el tiempo y dado un campo de velocidades inicial, demostrar (o dar un contraejemplo en caso contrario) de la existencia de una solución única consistente en un campo de velocidad vectorial y un campo de presión escalar que sean ambos suaves[2] *globalmente definidos y que resuelvan las ecuaciones de Navier-Stokes.*

En definitiva, se trata de probar si existe o no una solución única para cada estado laminar inicial, y si esta permanecerá definida para tiempos y distancias arbitrariamente grandes, esto es, si las soluciones existen y son estables.

[1]El *Clay Mathematics Institute* (CMI) es una fundación privada, sin ánimo de lucro, dedicada a incrementar y difundir el conocimiento matemático, con sede en Cambridge, Massachusetts. Concede diversos premios y patrocinios a matemáticos prometedores. El instituto se fundó en 1998 gracias al patrocinio de Landon T. Clay, empresario de Boston.

[2]La suavidad de una función es una propiedad medida por la cantidad de derivadas continuas que tiene en algún dominio. Como mínimo, una función podría considerarse suave si es diferenciable en todas partes (por lo tanto, continua). En el otro extremo, también podría poseer derivadas de todos los órdenes en su dominio, en cuyo caso se dice que es infinitamente diferenciable y se le llama una función C^{∞}.

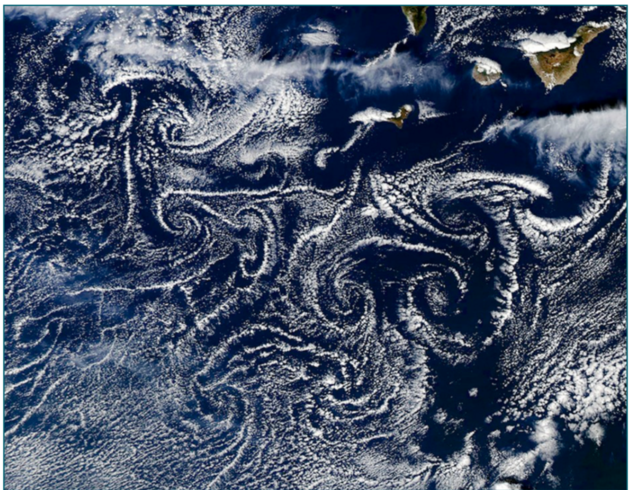

Figura 1. Calles de torbellinos de Von Kármán alrededor de las Islas Canarias. NASA.

El problema aún no ha sido resuelto, a pesar de las muchas publicaciones anunciando su resolución. Hay cierto consenso general en la comunidad científica acerca de las dudas en relación a la unicidad de las soluciones y también a si no se producen “explosiones” en las soluciones, que indicarían singularidades y, por lo tanto, la presión o la velocidad en algunos puntos no estarían bien definidas, lo que abocaría a la formación de turbulencias.

LOS SIETE PROBLEMAS DEL MILENIO

Los problemas del milenio son siete problemas matemáticos cuya resolución sería premiada, según anunció el *Clay Mathematics Institute*, en el año 2000, con la suma de un millón de dólares cada uno.

1. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.
2. La conjetura de Hodge.
3. Existencia y suavidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.
4. La conjetura de Poincaré.
5. El problema P contra NP.
6. La hipótesis de Riemann.
7. Teoría cuántica de Yang-Mills.

Hasta el día de hoy, solamente uno de estos problemas ha sido resuelto, la Conjetura de Poincaré, por Grigori Pelerman, cuya resolución fue aceptada por el Instituto Clay en 2006 (consultado www.claymath.org, 26 de septiembre de 2023). Cabe destacar que uno de los siete problemas del Premio del Milenio, la hipótesis de Riemann, formulada en 1859, también figura en la lista de veintitrés problemas tratados en el discurso pronunciado en París por David Hilbert el 9 de agosto de 1900 en la conferencia de matemáticas de París.

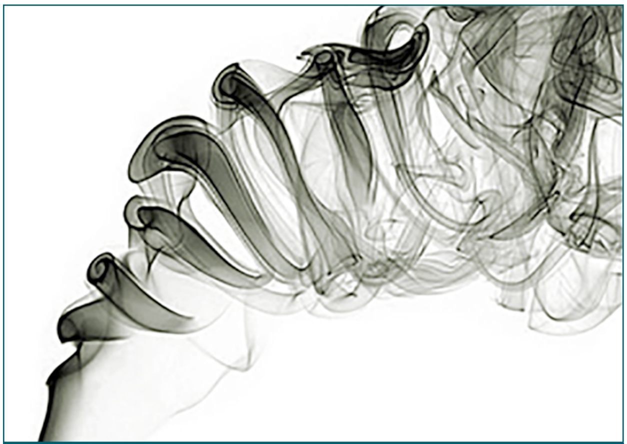

Figura 2. Complejidad de una columna de humo ascendiendo. Foto de Graham Jeffery.

FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes, llamadas así en honor de C.L.H. Navier y sir G. Stokes, quienes fueron los primeros en plantearlas (Navier, 1823 y Stokes, 1845) son la expresión de la conservación de la cantidad de movimiento del fluido. Se trata de tres ecuaciones en derivadas parciales no lineales (una para cada coordenada), de segundo orden,

Figura 3. Claude-Louis Marie Henri Navier (Dijon, 1785-París 1836) y Sir George Gabriel Stokes (Skreen, 1819 - Cambridge, 1903).

fuertemente acopladas, que representan la conservación de la cantidad de movimiento de un fluido newtoniano[3].

Su obtención en forma diferencial se basa en plantear, en un volumen de control en forma de cubo de dimensiones infinitesimales dx, dy, dz, la conservación de la cantidad de movimiento, teniendo en cuenta las fuerzas de volumen y de superficie actuantes sobre él.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, en su forma diferencial, en coordenadas cartesianas, tienen el siguiente aspecto:

$$(1)\quad \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$(2)\quad \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$(3)\quad \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

donde:
u, v, w: velocidades del fluido en x, y, z.
p: presión.
ρ: densidad del fluido.
μ: viscosidad dinámica del fluido.
g_x, g_y, g_z: componentes de la aceleración de la gravedad o cualquier otra fuerza de volumen (aceleración de Coriolis, aceleración centrípeta, efectos magnéticos, etc.).

¡Un Victorino en toda regla, vamos!

El lado izquierdo del morlaco está compuesto por las fuerzas gravitatoria, de presión y viscosidad por unidad de volumen, que se igualan al lado derecho que contempla la inercia por unidad de volumen, $\rho\frac{d\vec{V}}{dt}$. El término de la derecha consiste en un término no lineal debido al término de inercia convectiva[4].

Como hay cuatro incógnitas, a saber, el campo escalar de presión $p(x, y, z, t)$ y el campo vectorial de velocidad $\vec{V} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]$ y solo tres ecuaciones de Navier-Stokes, hay que combinarlas con la ecuación de continuidad (conservación de la masa) para poderlas resolver, ecuación que, para flujo incompresible $(\rho = cte)$, toma la forma siguiente:

$$(4)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Esta ecuación nos indica que el flujo ha de ser solenoide —divergencia nula—, lo que significa que no hay fuentes ni sumideros.

En forma compacta, las ecuaciones de Navier-Stokes y la de continuidad pueden expresarse como:

$$(5)\quad \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{V} = \rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right)$$

$$(6)\quad \vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = 0$$

[3]Un fluido newtoniano es un fluido cuya viscosidad es constante. Un buen número de fluidos comunes se comportan como fluidos newtonianos en condiciones normales de presión y temperatura. Por ejemplo, el agua, el aceite, la gasolina, el alcohol, el queroseno, el benceno y la glicerina.

[4]La aceleración convectiva surge cuando la partícula se mueve a través de regiones de velocidad espacialmente variable, como en una tobera o un difusor. Los flujos nominalmente "estacionarios" pueden presentar grandes aceleraciones debidas a los términos convectivos.

siendo $\vec{\nabla}$ el operador gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$ y $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ el operador Laplaciano.

En el caso de flujo incompresible, la ecuación de la energía no está acoplada a la de Navier-Stokes, por lo que no es necesaria para la obtención de $\vec{V}$ y p.

Si eliminamos el término de viscosidad[5,6] en la ecuación compacta de Navier-Stokes, obtenemos la ecuación de Euler (Euler, 1757):

$$(7)\quad \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p = \rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right)$$

Podría parecer que la condición de flujo incompresible deja mucha casuística fuera, pero eso es más aparente que real. Es más, puede decirse que, bajo esa hipótesis, se cubre la mayoría de los casos de fluidos en la vida real. ¿Cuándo es un flujo aproximadamente incompresible? Cuando podemos eliminar la densidad de la ecuación de continuidad y una buena aproximación para eso es cuando el número de Mach (v, c) es ≤0.3 (White and Xuen, 2021), siendo c la velocidad del sonido en el fluido. Por ejemplo, para el aire en condiciones estándar, un flujo puede considerarse incompresible si la velocidad es inferior a unos 100 m/s. Esto abarca una amplia variedad de flujos de aire como movimientos de automóviles y trenes, aviones ligeros, aterrizaje y despegue de aviones de alta velocidad, la mayoría de los flujos de tuberías y turbomaquinaria a velocidades de rotación moderadas. Además, está claro que casi todos los flujos de líquidos son incompresibles, ya que la velocidad del sonido en los fluidos es muy grande.

Hay más restricciones que se incluyen en las ecuaciones Navier-Stokes además de fluido incompresible y newtoniano. Por ejemplo, se presupone que las fuerzas viscosas $\mu\vec{\nabla}^2 V$ dependen linealmente de las derivadas espaciales segundas de la velocidad, lo cual podría dejar de ser cierto para valores elevados de estas derivadas.

ORIGEN DE LAS NO LINEALIDADES DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales porque algunos de sus términos no exhiben una relación lineal. Esto significa que las ecuaciones no pueden resolverse utilizando técnicas lineales tradicionales y, en su lugar, deben utilizarse métodos más avanzados.

La no linealidad es importante en las ecuaciones de Navier-Stokes porque permite que estas ecuaciones describan una amplia gama de fenómenos de dinámica de fluidos, incluida la formación de ondas de choque y otros patrones de flujo complejos. Sin embargo, la no linealidad también las hace más difíciles de resolver, ya que los métodos lineales tradicionales pueden no funcionar.

Figura 4. Remolinos formados en las puntas de las alas de un avión.

Una forma de entender la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes es considerar el término de convección $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}$ en las mismas. Este término representa la aceleración que experimenta un fluido por causas geométricas y es el producto del vector velocidad $\vec{V}$ con el operador de gradiente $\vec{\nabla}$. Dado que el operador de gradiente es un operador lineal, el término $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}$ es no lineal en el vector de velocidad . Esto significa que la aceleración del fluido depende de la magnitud y de la dirección de la velocidad, así como de su distribución espacial dentro del mismo.

Otra fuente de no linealidad en las ecuaciones de Navier-Stokes es el término de presión $\vec{\nabla}p$. Un ejemplo de esta naturaleza no lineal se puede ver en el caso de un fluido que fluye alrededor de un obstáculo circular. Dado que la velocidad es mayor cerca del obstáculo, la tasa de flujo de masa a través de una superficie cercana al mismo será mayor que la tasa de flujo de masa a través de una superficie más alejada de él. Esto se puede compensar con un gradiente de presión, con una presión más alta cerca del obstáculo y una presión más baja lejos del mismo.

Como resultado de estos efectos no lineales, las ecuaciones de Navier-Stokes se vuelven increíblemente difíciles de resolver analíticamente, y se deben utilizar aproximaciones o métodos numéricos para encontrar los campos de velocidad y presión en el flujo.

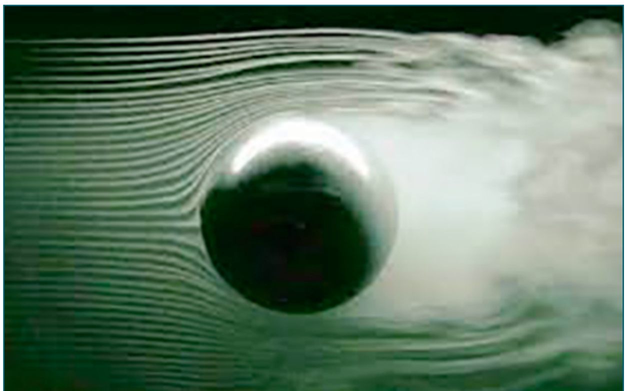

Figura 5. Flujo alrededor de una bola.

[5]La ecuación de continuidad general es $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$ Para flujo incompresible la densidad puede eliminarse quedando $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

[6]Jean le Rond d'Alembert propuso en 1743 su famosa paradoja: "un cuerpo en un flujo no viscoso tiene resistencia nula". Un resultado deslumbrante pero muy poco práctico, ya que, en la realidad, todos los fluidos son, en mayor o menor grado, viscosos.

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES

En el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes, las soluciones débiles son soluciones que pueden no ser diferenciables en el sentido tradicional, pero que aún satisfacen las ecuaciones en un sentido más amplio, generalmente en el sentido de las distribuciones o funciones generalizadas[7].

Una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes satisface las ecuaciones en un sentido integrado, es decir, cuando se integran las ecuaciones sobre un dominio o un intervalo de tiempo, las variables relevantes como la velocidad y la presión satisfacen las ecuaciones integrales resultantes. Estas soluciones a menudo se utilizan en el análisis matemático y numérico de las ecuaciones cuando las soluciones suaves no son fáciles de obtener o pueden no existir.

En la práctica, una solución débil es como contemplar un cuadro desde lejos de manera tal que sus imperfecciones (salvando las distancias, brochazos y raspaduras serían lo equivalente a singularidades y rotura de las ecuaciones) pasan inadvertidas. En general, la solución cumple con los requisitos, aunque haya puntos y zonas en las que no lo hace. Matemáticamente es plantear las ecuaciones no sobre un cubo diferencial, como planteó Euler, sino sobre un volumen más grande, pasando de ecuaciones diferenciales a integrales. Es en esta clase de funciones donde se busca la prueba del problema.

Está claro que el comportamiento de los fluidos conecta de manera palmaria con la teoría del caos ya que, al menos en algunas zonas de un flujo, se establecen singularidades que no son otra cosa que condiciones desbocadas de presión y, especialmente, de velocidad. Afortunadamente, y siempre que la energía total del fluido no sea demasiado grande, se trata de efectos locales.

ESTADO ACTUAL DEL PREMIO DEL INSTITUTO CLAY

A día de hoy, nadie ha presentado la prueba o la refutación al problema de la existencia y suavidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, quedando este problema del milenio pendiente de resolución. En cualquier caso, nunca deja de haber intentos y publicaciones donde se proclama haber encontrado la solución.

Por ejemplo, en el año 2013, el matemático kazajo Mujtarbay Otelbáyev (2013) anunció haber resuelto el problema en cuestión. Sin embargo, parece ser que su trabajo no resultó completamente preciso. Esto se debe a que su solución se encuentra en el espacio de Hilbert L^2, que corresponde al espacio de las funciones de cuadrado integrable, en lugar de estar en el espacio crítico requerido para las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones, conocido como L^3. Resumiendo, Otelbáyev probó la existencia y suavidad para 2D, algo que ya estaba probado mucho antes por Leray en 1934, pero no para 3D, donde las cosas se complican enormemente.

[7]Una distribución o función generalizada es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida. Un ejemplo de estas es la función delta de Dirac, que no es una función en el sentido usual y su integral no se puede desarrollar con los métodos comunes.

Más recientemente, T. Buckmaster y V. Vicol (2018) han publicado un estudio donde se prueba la no unicidad de soluciones débiles en las ecuaciones, partiendo de una energía cinética del fluido finita. Es importante destacar el trabajo de Buckmaster y Vicol porque, de ser correcto este estudio, se habría resuelto el problema del milenio por la vía menos esperada: para unas mismas condiciones iniciales, el fluido no sigue una trayectoria única, sino puede haber varias soluciones al campo de presión y velocidad.

En general, la comunidad científica conjetura que, de existir la unicidad, la solución tampoco será suave, es decir, se podrían presentar singularidades inesperadas en el fluido, a pesar de partir de un estado inicial de flujo laminar y de estar limitada la energía cinética inicial del mismo.

REFLEXIÓN FINAL

Mora (Mora, 2008) explica de manera cristalina el problema mediante el siguiente ejemplo:

…Consideremos un recipiente cerrado e inmóvil que está totalmente lleno de agua. Supongamos que, justo antes de cerrar el recipiente, hemos puesto el agua en movimiento con una cierta fuerza. Supongamos también que, justo después de cerrar el recipiente, supiésemos exactamente la magnitud y dirección de la velocidad del agua en cada punto. ¿Sería posible predecir los valores de estas mismas variables para instantes futuros hasta que el agua estuviese prácticamente en reposo? (sic)…

—Bien sûr, Monsieur Mora! diría Laplace.

Laplace ya abrazó al determinismo argumentando de una manera muy gráfica en 1796…*si un ser sobrehumano* —un “demonio”, dijo él— *conociese la situación inicial de las partículas en el universo, resolviendo las ecuaciones de movimiento podría conocer su futuro con detalle infinito* (sic).

Pero una cosa es llamar a la puerta y otra cosa muy diferente es bajar a abrir. Heisenberg mandó a los infiernos al demonio de Laplace con su principio de incertidumbre:

— ¡Demonio, o escoges conocer la posición de cada partícula o escoges su velocidad, pero ambas a la vez no puedes!

La mecánica de fluidos trata al fin y al cabo de interacción entre partículas y estas son, a la postre, conglomerados de ellas que, descendiendo en la escala social, tendríamos: volúmenes de control diferenciales, gotas, moléculas, átomos, electrones, protones, neutrones, quarks, quizá cuerdas. Son a los componentes más pequeños a los que se refiere Heisenberg. Es evidente que las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden capturar todos los aspectos de las interacciones entre partículas, quedándose en la descripción “superficial” de las interacciones entre ellas. Y aún así ya presentan un aspecto formidable. Conocer a fondo el comportamiento de un fluido, sería como intentar adivinar la trayectoria de un balón de Nivea gigante, pongamos de diez metros de diámetro, que se arrojara a los espectadores de un concierto de los Rolling. Ni el demonio de Laplace podría conocer la trayectoria del balón. Decenas o centenas de manos golpearían a la vez al balón cada vez que cayera sobre la gente, con distinto impulso, distinta dirección y a distinto tiempo. Quién sabe si terminaría cayendo finalmente sobre la cabeza de Keith Richards, dejándolo más tonto que cuando se cayó del cocotero.

A pesar de todas las simplificaciones que estamos imponiendo al modelo propuesto por las ecuaciones de Navier-Stokes (flujo incompresible, fluidos newtonianos, etc.), aún así, todavía desconocemos la forma y naturaleza de las soluciones. La consecuencia de todo esto sería que el resultado ofrecido por cualquier simulación, por muy buena que esta fuera, terminaría por distanciarse de manera considerable del comportamiento real del fluido si esperamos o nos alejamos lo suficiente.

El demonio no sabemos, pero quizá Bruce Lee sí conocía la solución a este problema del milenio cuando decía aquello de *be water, my friend*.

REFERENCIAS

1. L. Euler (1757), Principes généraux du mouvement des fluids. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, Volume 11, pp. 274-315.
2. C. L. M. H. Navier (1823), Mémoire sur les lois du Mouvement des Fluides. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, 1823, pp. 389-440.
3. G. G. Stokes (1845), On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Volume 8, pp. 287-305.
4. P.S. Laplace, (1796), Exposition du systéme du monde. Tome première. Paris.
5. M. Otelbaev (2013), Existence of a strong solution of the Navier-Stokes equations. Mathematical Journal. Volume 13. Num 4 (50).
6. T. Buckmaster, V. Vicol (2018), Nonuniquesses of weak solutios to the Navier-Stokes equation. arXiv: 1709.10033v4 [math.AP].
7. F. White and H. Xuen (2021). Fluid Mechanics. Nineth Edition. MacGraw-Hill.
8. X. Mora, (2008). Les equacions de Navier-Stokes. Un repte al determinisme newtonià. Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 23, pp. 53–120. doi: 10.2436/20.2002.01.12.■